UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Matemáticas IV (MA-2115)
Trimestre Ene-Mar 2020

Elaborado por
Patricia Catalano
15-10271
Ing. Producción

Segundo Examen Parcial

1) Hallar la solución general de las ecuaciones diferenciales

a) $\boldsymbol{y'' - 2y' + 5y = e^x \cos(2x)}$

Solución:

La solución general, para una ecuación diferencial de orden n, se puede escribir como $y = y_h + y_p$. Donde, y_h es la solución para la EDO homogénea asociada y y_p, la solución particular, es cualquier función que satisface la ecuación diferencial no homogénea.

Vemos que esta ecuación diferencial ordinaria es de segundo orden, lineal, no homogénea y con coeficientes constantes. Ya que, tiene la forma: $Ay'' + By' + Cy = g(x)$.

Comencemos hallando la solución homogénea.
Como se mencionó, previamente, esta EDO es de coeficientes constantes. Por ello, usaremos la ecuación auxiliar. La cual seria $Am^2 + Bm + C = 0$. Como se ve, trasformamos la ecuación diferencial de segundo orden en una ecuación de segundo grado con raíces m_1 y m_2. Pueden pasar tres cosas:

1- $m_1 \neq m_2$. La solución será: $y_h = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$
2- $m_1 = m_2 = m$. La solución será: $y_h = C_1 e^{\mathrm{m}x} + C_2 x e^{\mathrm{mx}}$
3- m_1 y m_2 complejos conjugados. La solución será: $y_h = e^{\alpha x}[C_1 \cos(\beta x) + C_2 sen(\beta x)]$, donde $\alpha = Re(z)$ y $\beta = Im(z)$

Sabiendo esto, vamos a hallar la solución homogénea para la ecuación diferencial dada, es decir, hallar la solución para:

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

Por medio de la ecuación auxiliar queda:

$$m^2 - 2m + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad \big(m - (1 + 2i)\big)\big(m - (1 - 2i)\big) = 0$$

Entonces $m_1 = 1 + 2i$ y $m_2 = 1 - 2i$

Por lo que estamos en el caso 3, el de complejos conjugados, con $\alpha = 1$ y $\beta = 2$.

Así,

$$y_h = e^{\alpha x}[C_1 \cos(\beta x) + C_2 sen(\beta x)]$$

$$y_h = e^{x}[C_1 \cos(2x) + C_2 sen(2x)]$$

$$\boxed{y_h = C_1 e^{x} \cos(2x) + C_2 e^{x} sen(2x)}$$

Ahora, conociendo la solución homogénea, hallemos la solución particular

Para ello hay dos métodos:

1- Método de coeficientes indeterminados: Solo es aplicable si $g(x)$ es $sen(ax), Cos(ax), e^{ax}$, polinomio o una combinación lineal o producto entre ellas.

2- Método de variación de parámetros: Este método plantea que $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, donde $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son la soluciones homogéneas, y se cumple que:

$$\begin{cases} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = g(x) \end{cases}$$

En este caso, dado que $g(x) = e^{x} \cos(2x)$, podemos utilizar cualquier método. Pero, usaremos variación de parámetros ya que es más corto (en este caso).

Así, procedo a hallar la solución particular por el método de variación de parámetros:

Sabemos que $y_1(x) = e^{x} cos(2x)$ y $y_2(x) = e^{x} sen(2x)$. Por lo que

$$y_p = u_1(x)e^{x} cos(2x) + u_2(x)e^{x} sen(2x)$$

Antes, calculo el wronskiano, sabiendo que

$$w = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Sustituyo y queda que

$$w = \begin{vmatrix} e^{x} cos(2x) & e^{x} sen(2x) \\ e^{x} cos(2x) - 2e^{x} sen(2x) & e^{x} sen(2x) + 2e^{x} cos(2x) \end{vmatrix} = 2e^{2x}$$

Sustituyendo $y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x)$ en el sistema de ecuaciones planteado anteriormente, obtenemos que

$$\begin{cases} u_1'(x)e^x cos(2x) + u_2'(x)e^x sen(2x) = 0 \\ u_1'(x)\left(e^x cos(2x) - 2e^x sen(2x)\right) + u_2'(x)\left(e^x sen(2x) + 2e^x cos(2x)\right) = e^x \cos(2x) \end{cases}$$

Debemos hallar $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$

Utilizando la regla de Kramer, obtenemos que

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ g(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{w} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x sen(2x) \\ e^x cos(2x) & e^x sen(2x) + 2e^x cos(2x) \end{vmatrix}}{2e^{2x}} = -\frac{\cos(2x)\, sen(2x)}{2}$$

$$u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & g(x) \end{vmatrix}}{w} = \frac{\begin{vmatrix} e^x cos(2x) & 0 \\ e^x cos(2x) - 2e^x sen(2x) & e^x cos(2x) \end{vmatrix}}{2e^{2x}} = \frac{cos^2(2x)}{2}$$

Luego,

$$u_1(x) = \int u_1'(x)dx = \int -\frac{\cos(2x)\, sen(2x)}{2} dx = \frac{cos(4x)}{16}$$

$$u_2(x) = \int u_2'(x)dx = \int \frac{cos^2(2x)}{2} dx = \frac{x}{4} + \frac{sen(4x)}{16}$$

Así,

$$\boxed{y_p = \left(\frac{cos(4x)}{16}\right) e^x cos(2x) + \left(\frac{x}{4} + \frac{sen(4x)}{16}\right) e^x sen(2x)}$$

Por último, como mencionamos al principio, la solución general viene dada por

$$y = y_h + y_p$$

De manera que:

$$\boxed{y = C_1 e^x \cos(2x) + C_2 e^x sen(2x) + \left(\frac{cos(4x)}{16}\right) e^x cos(2x) + \left(\frac{x}{4} + \frac{sen(4x)}{16}\right) e^x sen(2x)}$$

b) $\boldsymbol{x^2 y'' - xy' + y = x ln^3(x)}$

Solución:

Nos damos cuenta que se trata de una ecuación diferencial ordinaria de orden dos, lineal y con coeficientes variables, particularmente es una ecuación de Euler, ya que, la ecuación homogénea asociada , tiene la forma $Ax^2y'' + Bxy' + Cy = 0$. Como se mencionó en el problema anterior: La solución general, para una ecuación diferencial de orden n, se puede escribir como $y = y_h + y_p$. Donde, y_h es la solución para la EDO homogénea asociada y y_p, la solución particular, es cualquier función que satisface la ecuación diferencial no homogénea.

Primero, hallemos la solución homogénea haciendo uso de la ecuación de Euler. En este caso no se puede usar la ecuación auxiliar porque los coeficientes de y y sus derivadas no son constantes, son variables. Pero, el método de Euler, consiste en transformar esta ecuación diferencial con coeficientes variables, en una con coeficientes constantes. Para ello hacemos el cambio de variable $y = x^m$ y hallamos tantas derivadas de y como el orden de la ecuacion. En este caso serían 2. Luego, sustituimos el cambio de variable y quedara algo de la forma $x^m(Am^2 + Bm + C) = 0$. De esta ecuación obtendremos m_1 y m_2. Pueden pasar tres cosas:

1- $m_1 \neq m_2$. La solución será: $y_h = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}$
2- $m_1 = m_2 = m$. La solución será: $y_h = C_1 x^{\mathrm{m}} + C_2 x^{\mathrm{m}} \ln(x)$
3- m_1 y m_2 complejos conjugados. La solución será: $y_h = x^{\alpha}[C_1 \cos(\beta ln x) + C_2 sen(\beta ln x)]$, donde $\alpha = Re(z)$ y $\beta = Im(z)$

Teniendo en cuenta esto, voy a hacer mi cambio de variable y luego ver cuál de los tres casos corresponde.

Hago el cambio de variable

$$\begin{cases} y = x^m \\ y' = m x^{m-1} \\ y'' = (m^2 - m)x^{m-2} \end{cases}$$

Sustituyo en la ecuación y queda

$$x^2(m^2 - m)x^{m-2} - x m x^{m-1} + x^m = 0$$

$$(m^2 - m)x^m - m x^m + x^m = 0$$

$$x^m(m^2 - 2m + 1) = 0$$

x es distinto de cero porque entonces la solución sería la trivial y no la queremos, entonces $x^m \neq 0$. De tal forma que

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$(m - 1)^2 = 0$$

Luego, $m_1 = m_2 = 1$. Estamos en el caso 2. Por lo tanto, la solución homogénea viene dada por

$$y_h = C_1 x^{\mathrm{m}} + C_2 x^{\mathrm{m}} \ln(x)$$

$$\boxed{y_h = C_1 x + C_2 x \ln(x)}$$

Ahora, conociendo la solución homogénea podemos hallar la solución particular. Como mencione anteriormente, se puede hallar por dos métodos, el de coeficientes indeterminados y el de variación de parámetros. Pero, en este caso, el método de coeficientes indeterminados NO se puede aplicar ya que hay un logaritmo y este método no aplica para los logaritmos. Por lo tanto, para hallar la solución particular debemos usar el método de variación de parámetros. Este método plantea que

$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, donde $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son la soluciones homogéneas, que en este caso $y_1(x) = x$ y $y_2(x) = xlnx$. Por lo que

$$y_p = u_1(x)x + u_2(x)xlnx$$

y se cumple que:

$$\begin{cases} u_1{}'(x)y_1(x) + u_2{}'(x)y_2(x) = 0 \\ u_1{}'(x)y_1{}'(x) + u_2{}'(x)y_2{}'(x) = g(x) \end{cases}$$

Sustituyo y queda

$$\begin{cases} u_1{}'(x)x + u_2{}'(x)xlnx = 0 \\ u_1{}'(x) + u_2{}'(x)(lnx + 1) = xln^3(x) \end{cases}$$

Ahora, calculamos el wronskiano, sabiendo que

$$w = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1{}'(x) & y_2{}'(x) \end{vmatrix}$$

Sustituyo y queda

$$w = \begin{vmatrix} x & xlnx \\ 1 & lnx + 1 \end{vmatrix} = x$$

Ahora, debemos hallar $u_1{}'(x)$ y $u_2{}'(x)$

Utilizando la regla de Kramer, tenemos que

$$u_1{}'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ g(x) & y_2{}'(x) \end{vmatrix}}{w} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xlnx \\ xln^3(x) & lnx + 1 \end{vmatrix}}{x} = -xln^4(x)$$

$$u_2{}'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1{}'(x) & g(x) \end{vmatrix}}{w} = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & xln^3(x) \end{vmatrix}}{x} = xln^3(x)$$

Luego,

$$u_1(x) = \int u_1{}'(x)dx = \int -xln^4(x)dx = -\frac{x^2ln^4x}{2} + x^2ln^3x - \frac{3x^2ln^2x}{2} + \frac{3x^2lnx}{2} - \frac{3x^2}{4}$$

$$u_2(x) = \int u_2{}'(x)dx = \int xln^3(x)dx = \frac{x^2ln^3x}{2} - \frac{3x^2}{4}\left(ln^2x - lnx + \frac{1}{2}\right)$$

Así,

$$y_p = \left(-\frac{x^2ln^4x}{2} + x^2ln^3x - \frac{3x^2ln^2x}{2} + \frac{3x^2lnx}{2} - \frac{3x^2}{4}\right)x + \left(\frac{x^2ln^3x}{2} - \frac{3x^2}{4}\left(ln^2x - lnx + \frac{1}{2}\right)\right)xlnx$$

$$y_p = \frac{x^3}{4}\left(-2ln^4x + 4ln^3x - 6ln^2x + 6lnx - 3 + 2ln^4x - 3ln^3x + 3ln^2x - \frac{3}{2}lnx\right)$$

$$\boxed{y_p = \frac{x^3}{4}\left(ln^3x - 3ln^2x + \frac{9}{2}lnx - 3\right)}$$

Por último, como mencionamos al principio, la solución general viene dada por

$$y = y_h + y_p$$

De manera que:

$$\boxed{y = C_1x + C_2x\ln(x) + \frac{x^3}{4}\left(ln^3x - 3ln^2x + \frac{9}{2}lnx - 3\right)}$$

c) Halle la solución particular de la ecuación $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^4$, sabiendo que $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^2lnx$ son soluciones linealmente independientes en $(0, \infty)$ de la ecuación homogénea asociada.

Solución:

Por lo que nos dice el problema, la solución homogénea de la ecuación diferencial es:

$$y_h = C_1x^2 + C_2x^2lnx$$

Ahora, procederemos a hallar la solución particular por el método de coeficientes indeterminados. En este caso, si se puede, ya que $g(x) = x^4$ es un polinomio.

Según este método, lo primero que debemos hacer es conocer la forma que tendrá la solución particular. Dicha forma viene dada como una generalización de la función $g(x)$. En dicha generalización, todos los términos deben ser linealmente independientes entre sí y, además, linealmente independientes de los términos de la solución homogénea.

Como $g(x)$ es un polinomio de grado 4. Entonces en principio

$$y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

Pero, vemos que el termino Cx^2 se puede sumar con el término de la solución homogénea C_1x^2. Cosa que no queremos. Para solucionar este problema, multiplicarnos el polinomio $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ por x tantas veces como sea necesario para que ningún termino sea x^2. En este caso, multiplicaremos por x^3. De manera que

$$y_p = Ax^7 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ex^3$$

Ahora, hallaremos tantas derivadas de y_p como sea el orden de la ecuación diferencial. Como es de orden dos, debemos hallar las dos primeras derivadas.

$$y'_p = 7Ax^6 + 6Bx^5 + 5Cx^4 + 4Dx^3 + 3Ex^2$$

$$y''_p = 42Ax^5 + 30Bx^4 + 20Cx^3 + 12Dx^2 + 6Ex$$

Sustituimos y_p y donde aparezca y en la ecuación, al fin y al cabo, y_p es una solución para la ecuación diferencial. Obtenemos que

$$x^2(42Ax^5 + 30Bx^4 + 20Cx^3 + 12Dx^2 + 6Ex) - 3x(7Ax^6 + 6Bx^5 + 5Cx^4 + 4Dx^3 + 3Ex^2) + 4(Ax^7 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ex^3) = x^4$$

Simplificamos y agrupamos términos y obtenemos

$$(25A)x^7 + (16B)x^6 + (9C)x^5 + (4D)x^4 + (E)x^3 = x^4$$

Esta ecuación solo es verdad si

$$\begin{cases} 25A = 0 \\ 16B = 0 \\ 9C = 0 \\ 4D = 1 \\ E = 0 \end{cases}$$

Por lo que, $A = 0, B = 0, C = 0, D = \frac{1}{4}, E = 0$

Sustituyo los coeficientes obtenidos en la generalización planteada al principio y obtengo que

$$y_p = (0)x^7 + B(0) + (0)x^5 + \frac{1}{4}x^4 + (0)x^3$$

Así, la solución particular es:

$$\boxed{y_p = \frac{1}{4}x^4}$$

2) Resolver el Sistema de E.D.O no homogéneo

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + G(x) \\ \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donde $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, G(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}$ y $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} 4e^{6x} - 2e^{x} \\ e^{6x} + 2e^{x} \end{pmatrix}$ es solución del sistema no homogéneo asociado.

Solución: Como $\vec{y}(x)$ es solución del sistema homogéneo. La solución homogénea es

$$\boxed{\vec{y}_h(x) = C_1\binom{4}{1}e^{6x} + C_2\binom{-2}{2}e^{x}}$$

Para la solución particular se sabe que viene dada por $\vec{y}_p(x) = \Phi(x)\int \Phi^{-1}(x)G(x)dx$.
Donde $\Phi(x)$ es la matriz fundamental, la cual es

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 4e^{6x} & -2e^{x} \\ e^{6x} & 2e^{x} \end{pmatrix}$$

Luego, $\Phi^{-1}(x)$ es la matriz inversa de $\Phi(x)$. Por lo que

$$\Phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^{-6x} & \frac{1}{5}e^{-6x} \\ -\frac{1}{10}e^{-x} & \frac{2}{5}e^{-x} \end{pmatrix}$$

Y $G(x)$ es dado por el problema

$$G(x) = \binom{0}{e^{2x}}$$

Sustituyo y queda

$$\vec{y}_p(x) = \begin{pmatrix} 4e^{6x} & -2e^{x} \\ e^{6x} & 2e^{x} \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^{-6x} & \frac{1}{5}e^{-6x} \\ -\frac{1}{10}e^{-x} & \frac{2}{5}e^{-x} \end{pmatrix}\binom{0}{e^{2x}}dx$$

$$\vec{y}_p(x) = \begin{pmatrix} 4e^{6x} & -2e^{x} \\ e^{6x} & 2e^{x} \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^{-4x} \\ \frac{2}{5}e^{x} \end{pmatrix}dx$$

$$\vec{y}_p(x) = \begin{pmatrix} 4e^{6x} & -2e^{x} \\ e^{6x} & 2e^{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \int \frac{1}{5}e^{-4x}dx \\ \int \frac{2}{5}e^{x}\,dx \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_p(x) = \begin{pmatrix} 4e^{6x} & -2e^{x} \\ e^{6x} & 2e^{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{20}e^{-4x} \\ \frac{2}{5}e^{x} \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_p(x) = \begin{pmatrix} -e^{2x} \\ \frac{3}{4}e^{2x} \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\boxed{\vec{y}_p(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} e^{2x}}$$

Finalmente, $\vec{y}_g(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_p(x)$. De manera que

$$\vec{y}_g(x) = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6x} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} e^{2x}$$

Ahora, con la condición inicial $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, tenemos que:

$$\vec{y}_g(0) = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6(0)} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{(0)} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} e^{2(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

Por lo que, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4C_1 - 2C_2 = 3 \\ C_1 + 2C_2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Resolviéndolo, obtenemos que

$$C_1 = \frac{21}{20}$$

$$C_2 = \frac{3}{5}$$

Por lo tanto, la solución al problema de valor inicial es

$$\vec{y}_g(x) = \frac{21}{20} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6x} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} e^{2x}$$

$$\boxed{\vec{y}_g(x) = \begin{pmatrix} \frac{84}{20} \\ \frac{21}{20} \end{pmatrix} e^{6x} + \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} e^{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} e^{2x}}$$

3) Resolver el sistema de E.D.O homogéneo

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Nos encontramos con un sistema de E.D.O homogéneo. Para hallar a solución debemos buscar los valores y vectores propios de la matriz de coeficientes en la ecuación característica. Es decir, para la ecuación $|A - \lambda I| = 0$. Cada valor propio debe tener un vector propio asociado. Pueden pasar tres cosas:

1- $\lambda_1 \neq \lambda_2$. En este caso cada autovalor generará su propio autovector. $\vec{k}_1$ asociado a λ_1 y $\vec{k}_2$ asociado a λ_2. Y la solución del sistema será

$$\vec{x}_h(t) = C_1 \vec{k}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{k}_2 e^{\lambda_2 t}$$

2- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. En este caso pueden pasar dos cosas

a- Que λ genere dos autovectores diferentes. En ese caso, la solución será

$$\vec{x}_h(t) = C_1 \vec{k}_1 e^{\lambda t} + C_2 \vec{k}_2 e^{\lambda t}$$

b- Que λ genere un único autovector. En este caso hay un problema, porque cada autovalor debe tener un autovector asociado. Debemos generar otro autovector a partir del que ya tenemos. Lo haremos hallando el vector solución para el sistema $(A - \lambda I)\vec{k}_2 = \vec{k}_1$. Dicho vector solución es $\vec{k}_2$. La solución será

$$\vec{x}_h(t) = C_1 \vec{k}_1 e^{\lambda t} + C_2 \left[\vec{k}_1 t e^{\lambda t} + \vec{k}_2 e^{\lambda t} \right]$$

3- λ_1 y λ_2 son complejos conjugados. EN ese caso solo debemos buscar un vector propio $\vec{k}$ para uno de los dos λ. Dicho autvector tendrá la forma $\vec{k} = \vec{k}_1 + i\vec{k}_2$ de tal forma que $\vec{k}_1 = Re\left(\vec{k}\right)$ y $\vec{k}_2 = Im\left(\vec{k}\right)$. La solución será:

$$\vec{x}_h(t) = C_1 \left[\vec{k}_1 \cos(\beta t) - \vec{k}_2 sen(\beta t) \right] e^{\alpha t} + C_2 \left[\vec{k}_2 \cos(\beta t) + \vec{k}_1 sen(\beta t) \right] e^{\alpha t}$$

Luego, sabiendo esto procedemos a buscar los valores propios. Sustituimos $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ en $|A - \lambda I| = 0$ y obtenemos que

$$\left| \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)[(-\lambda)(3-\lambda) - 4] - 2[2(3-\lambda) - 8] + 4[4 + 4\lambda] = 0$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 = (\lambda+1)^2(\lambda - 8) = 0$$

Por lo que los valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 8$

Tenemos los casos 2 y 1. Sabemos que λ_3 generará su propio vector. Debemos ver si el autovalor $\lambda_1 = \lambda_2$ nos genera dos autovector o uno solo. Hallemos loa autovectores.

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$; $\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Sustituyendo en la matriz de coeficientes queda

$$\begin{pmatrix} 3-(-1) & 2 & 4 \\ 2 & -(-1) & 2 \\ 4 & 2 & 3-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos usando la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \to \frac{R_1}{2} \\ R_2 \to \frac{R_2}{2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo que

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \quad \to \quad x = -\dfrac{y}{2} - z \\ \qquad\qquad y \in \mathbb{R} \\ \qquad\qquad z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Así, $\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{2} - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Estamos en el caso 2a, ya que

Si $y = 2$ y $z = 0$ entonces $\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Si $y = 0$ y $z = 1$ entonces $\vec{k}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Luego,

$$\boxed{\vec{x}_1(t) = C_1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-t} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}}$$

Para $\lambda_3 = 8$; $\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Sustituyendo en la matriz de coeficientes queda

$$\begin{pmatrix} 3-(8) & 2 & 4 \\ 2 & -(8) & 2 \\ 4 & 2 & 3-(8) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos usando la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) R_1 \leftrightarrow R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -8 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) R_1 \to \frac{R_1}{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to R_3 + R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_3 \to R_3 + R_2 \\ R_2 \to R_2 + 5R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_2 \to \frac{R_2}{9} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) R_1 \to R_1 - 2R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo que

$$\begin{cases} x - z = 0 \quad \to \quad x = z \\ -2y + z = 0 \quad \to \quad y = \dfrac{z}{2} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Por lo que

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \dfrac{z}{2} \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $z = 2$ entonces $\vec{k}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Luego,

$$\boxed{\vec{x}_2(t) = C_3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{8t}}$$

Finalmente, la solución general $\vec{x}_h(t) = \vec{x}_1(t) + \vec{x}_2(t)$

$$\vec{x}_h(t) = C_1\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}e^{-t} + C_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}e^{-t} + C_3\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}e^{8t}$$

Ahora, $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$

$$\vec{x}(0) = C_1\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}e^{-(0)} + C_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}e^{-(0)} + C_3\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}e^{8(0)} = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$C_1\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}-C_1 - C_2 + 2C_3 = 2\\ 2C_1 + C_3 = 0\\ C_2 + 2C_3 = -2\end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, hallamos que

$$\begin{cases}C_1 = 0\\ C_2 = -2\\ C_3 = 0\end{cases}$$

Sustituyo y queda

$$\vec{x}_h(t) = -2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}e^{-t}$$

$$\boxed{\vec{x}_h(t) = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}e^{-t}}$$

4) Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix}3 & -1\\4 & -1\end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix}e^t\\e^t\end{pmatrix}$$

a) Calcule la matriz fundamental del sistema homogéneo

b) Encuentre la solución general del sistema no homogéneo

c) Halle la solución del sistema con la condición $\vec{x}(1) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

<u>**Solución:**</u>

Tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneo. La solución viene dada por $\overrightarrow{x_g}(t) = \overrightarrow{x_h}(t) + \overrightarrow{x_p}(t)$. Donde $\overrightarrow{x_h}(t)$ representa la solución al sistema homogéneo asociado y $\overrightarrow{x_p}(t)$ es la solución particular.

Primero, calculemos la solución al sistema homogéneo asociado. Para hallar a solución debemos buscar los valores y vectores propios de la matriz de coeficientes en la ecuación característica. Es decir, para la ecuación $|A - \lambda I| = 0$. Cada valor propio debe tener un vector propio asociado. Pueden pasar tres cosas:

1- $\lambda_1 \neq \lambda_2$. En este caso cada autovalor generará su propio autovector. $\vec{k}_1$ asociado a λ_1 y $\vec{k}_2$ asociado a λ_2. Y la solución del sistema será:

$$\vec{x}_h(t) = C_1\vec{k}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\vec{k}_2 e^{\lambda_2 t}$$

2- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. En este caso pueden pasar dos cosas

a- Que λ genere dos autovectores diferentes. En ese caso, la solución será:

$$\vec{x}_h(t) = C_1\vec{k}_1 e^{\lambda t} + C_2\vec{k}_2 e^{\lambda t}$$

b- Que λ genere un único autovector. En este caso hay un problema, porque cada autovalor debe tener un autovector asociado. Debemos generar otro autovector a partir del que ya tenemos. Lo haremos hallando el vector solución para el sistema $(A - \lambda I)\vec{k}_2 = \vec{k}_1$. Dicho vector solución es $\vec{k}_2$. La solución será:

$$\vec{x}_h(t) = C_1\vec{k}_1 e^{\lambda t} + C_2\left[\vec{k}_1 t e^{\lambda t} + \vec{k}_2 e^{\lambda t}\right]$$

3- λ_1 y λ_2 son complejos conjugados. EN ese caso solo debemos buscar un vector propio $\vec{k}$ para uno de los dos λ. Dicho autvector tendrá la forma $\vec{k} = \vec{k}_1 + i\vec{k}_2$ de tal forma que $\vec{k}_1 = Re\left(\vec{k}\right)$ y $\vec{k}_2 = Im\left(\vec{k}\right)$. La solución será:

$$\vec{x}_h(t) = C_1\left[\vec{k}_1\cos(\beta t) - \vec{k}_2 sen(\beta t)\right]e^{\alpha t} + C_2\left[\vec{k}_2\cos(\beta t) + \vec{k}_1 sen(\beta t)\right]e^{\alpha t}$$

Luego, sabiendo esto procedemos a buscar los valores propios. Sustituimos $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ en $|A - \lambda I| = 0$ y obtenemos que

$$\left|\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(-1-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$$

Vemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Por lo que estamos en el caso 2.

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Sustituyendo en la matriz de coeficientes queda

$$\begin{pmatrix} 3-1 & -1 \\ 4 & -1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos usando la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{array}\right) R_2 \to \frac{R_2}{2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) R_2 \to R_2 - R_1 \ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo que

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \quad \to \quad x = \dfrac{y}{2} \\ \qquad\qquad y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Así, $\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{2} \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Estamos en el caso 2b, ya que

Si $y = 2$ entonces $\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Solo se generó un autovector. Por lo que debemos generar el otro a partir de $\vec{k}_1$. Lo haremos resolviendo el $(A - \lambda I)\vec{k}_2 = \vec{k}_1$.

Sustituyo y queda

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\vec{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos usando la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{array}\right) R_2 \to \frac{R_2}{2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right) R_2 \to R_2 - R_1 \ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo que

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \quad \to \quad x = \dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{2} \\ \qquad\qquad y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Así, $\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{2} + 1 \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Si $y = 0$ Entonces $\vec{k}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Luego, la solución viene dada por

$$\vec{x}_h(t) = C_1\vec{k}_1 e^{\lambda t} + C_2\left[\vec{k}_1 t e^{\lambda t} + \vec{k}_2 e^{\lambda t}\right]$$

Así,

$$\boxed{\vec{x}_h(t) = C_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^t + C_2\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}te^t + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}e^t\right]}$$

La matriz fundamental de un sistema homogéneo, viene dada por

$$\Phi(t) = (\vec{x}_1(t) \quad \vec{x}_2(t))$$

Por lo que,

$$\boxed{\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & \left(t+\frac{1}{2}\right)e^t \\ 2e^t & 2te^t \end{pmatrix}}$$

Ahora, debemos hallar la solución particular, sabemos que viene dada por

$\vec{x}_p(t) = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)G(t)dt$. $\Phi(t)$ la acabamos de hallar.

Luego, $\Phi^{-1}(t)$ es la matriz inversa de $\Phi(t)$. Por lo que

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -2te^{-t} & \left(t+\frac{1}{2}\right)e^{-t} \\ 2e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

Y $G(t)$ es dado por el problema

$$G(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Sustituyo y queda

$$\vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} e^t & \left(t+\frac{1}{2}\right)e^t \\ 2e^t & 2te^t \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} -2te^{-t} & \left(t+\frac{1}{2}\right)e^{-t} \\ 2e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} dt$$

$$\vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} e^t & \left(t+\frac{1}{2}\right)e^t \\ 2e^t & 2te^t \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} -2t + \left(t+\frac{1}{2}\right) \\ 2-1 \end{pmatrix} dt$$

$$\vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} e^t & \left(t+\frac{1}{2}\right)e^t \\ 2e^t & 2te^t \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} -t+\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$\vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} e^t & \left(t+\frac{1}{2}\right)e^t \\ 2e^t & 2te^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \int \left(-t+\frac{1}{2}\right) dt \\ \int dt \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} e^t & \left(t+\frac{1}{2}\right)e^t \\ 2e^t & 2te^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{t}{2}-\frac{t^2}{2} \\ t \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} \left(\frac{t}{2}-\frac{t^2}{2}\right)e^t + t\left(t+\frac{1}{2}\right)e^t \\ 2e^t\left(\frac{t}{2}-\frac{t^2}{2}\right) + 2t^2e^t \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{2}-\frac{t^2}{2}+t^2+\frac{t}{2} \\ t-t^2+2t^2 \end{pmatrix}e^t$$

$$\vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} t+\frac{t^2}{2} \\ t+t^2 \end{pmatrix}e^t$$

Así,

$$\boxed{\vec{x}_p(t) = e^t t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + e^t t^2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}}$$

Como se mencionó al principio $\overrightarrow{x_g}(t) = \overrightarrow{x_h}(t) + \overrightarrow{x_p}(t)$. Por lo que

$$\boxed{\overrightarrow{x_g}(t) = C_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^t + C_2\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}te^t + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}e^t\right] + e^t t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + e^t t^2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}}$$

Para finalizar, $\vec{x}(1) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, evaluamos en $t = 1$

$$\overrightarrow{x_g}(1) = C_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^1 + C_2\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}(1)e^1 + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}e^1\right] + e^1(1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + e^1(1)^2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$C_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e + C_2\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}e\right] + e\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + e\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}eC_1\\2eC_1\end{pmatrix} + C_2\left[\begin{pmatrix}e\\2e\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}e\\0\end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix}e\\e\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{e}{2}\\e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}eC_1\\2eC_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}eC_2+\frac{e}{2}C_2\\2eC_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e\\e\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{e}{2}\\e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}eC_1+eC_2+\frac{e}{2}C_2+e+\frac{e}{2}\\2eC_1+2eC_2+e+e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} eC_1 + \frac{3e}{2}C_2 + \frac{3e}{2} \\ 2eC_1 + 2eC_2 + 2e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} eC_1 + \frac{3e}{2}C_2 + \frac{3e}{2} = 0 \\ 2eC_1 + 2eC_2 + 2e = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2C_1 + 3C_2 + 3 = 0 \\ C_1 + C_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos que $C_1 = 0$ y $C_2 = -1$. Sustituyo y queda que

$$\boxed{\overrightarrow{x_g}(t) = -\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^t\right] + e^t t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^t t^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Nota: Este material fue digitalizado por Patricia Catalano para GECO USB.

Patricia Catalano
15-10271
Ingeniería de Producción
Twitter: @pattycatalano

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb

agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com